ISTITUTO LOMBARDO
ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

RENDICONTI

Scienze Matematiche e Applicazioni

A

Vol. 123 (1989)

ESTRATTO

CARLO FELICE MANARA

PROBLEMI FILOSOFICI DELLA GEOMETRIA IN RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

—

MILANO
1990

 Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 123, *215-236 (1989)*

PROBLEMI FILOSOFICI DELLA GEOMETRIA IN RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Nota del m. e. CARLO FELICE MANARA

(Adunanza del 14 dicembre 1989)

SUMMARY. — Boscovich's ideas about Geometry and Physics are strictly connected. His methods and proceedings are of great phylosophical interest.

1. - È stato celebrato il bicentenario della morte di Ruggero Giuseppe Boscovich; questa ricorrenza ha chiamato l'attenzione del mondo scientifico e degli storici della scienza sulla figura di questo scienziato gesuita. A nostro parere l'altezza dell'ingegno, la versatilità dell'intelligenza e l'originalità del fisico e matematico dalmata meritano il ricordo e lo studio delle sue opere e del suo pensiero. In questa occasione la nostra attenzione è stata attirata da un'opera dello scienziato gesuita posseduta dalla Biblioteca Viganò, che si trova presso la Facoltà di Scienze dell'Università Cattolica (sede di Brescia).

Cogliamo qui l'occasione per esprimere la nostra gratitudine per la cortesia e disponibilità delle Autorità Accademiche dell'Università Cattolica "S. Cuore", le quali ci hanno permesso di conoscere un'opera molto rara, che raccoglie varie dissertazioni tenute dal Boscovich nel Collegio Romano (*).

(*) Ci è gradita l'occasione per rivolgere un particolare ringraziamento al prof. Pier Luigi Pizzamiglio, docente di storia della Matematica presso la sede bresciana della Facoltà

La raccolta di dissertazioni di cui parliamo ha il titolo:

DE LEGE VIRIUM / IN NATURA EXISTENTIUM / DISSERTATIO / AUCTORE / P. ROGERIO JOSEPHO / BOSCOVICH / SOCIETATIS JESU / Publico Matheseos Professore in Collegio Romano. 1758 / ROMAE / TYPIS JOHANNIS GENEROSI SALOMONI / SUPERIORUM PERMISSU.

È noto che l'ordine gesuitico, a differenza di altri ordini religiosi, ha sempre contato una notevole schiera di suoi appartenenti che sono intervenuti nelle questioni scientifiche più importanti del loro tempo. E le pubbliche dissertazioni su tali argomenti sono state una tra le tante testimonianze di questo interesse della Compagnia di Gesù per le scienze profane, in particolare per la Fisica e la Matematica.

Nella raccolta di cui parliamo è contenuta una dissertazione intitolata:

DE / CONTINUITATIS LEGE / ET EJUS CONSECTARIIS / PERTINENTIBUS / AD PRIMA MATERIAE ELEMENTA / EORUMQUE VIRES / DISSERTATIO / HABITA A PATRIBUS SOCIETATIS JESU / IN COLLEGIO ROMANO / Die 7 Augusti anno 1754 / ROMAE MDCCLIV. / EX TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI / PRAESIDUM FACULTATE.

Dal solo esame del titolo si tenderebbe a dedurre che la dissertazione sia esclusivamente dedicata all'esposizione delle tesi di Boscovich sulla costituzione della materia; ma dallo studio della dissertazione stessa ci si accorge che i problemi della materia, nella mente dell'Autore, sono strettamente collegati con quelli filosofici della Geometria, ed in particolare con quelli della continuità. La breve opera consta di 80 pagine scritte, più una, con 25 figure, posta alla fine.

La dissertazione è divisa in 154 paragrafi, di varia lunghezza; a questa numerazione faremo riferimento nel seguito in occasione delle citazioni che dovremo fare; si osservi tuttavia che manca il paragrafo corrispondente al N. 95; il che permette di concludere per una certa provvisorietà della pubblicazione di queste dissertazioni. Evidentemente esse sono state scritte in forma meno definitiva di quella che si incontra nei volumi

---

di scienze dell'Università Cattolica, per le numerose e valide indicazioni ed informazioni con cui ha voluto assisterci nella stesura di questo lavoro e di altri a questo collegati.

di una certa mole; ma forse per questo fatto esse richiamano la nostra attenzione, perché si potrebbe pensare che in esse si incontri il pensiero degli Autori — per così dire — allo stato nascente, e che esse rivelino così anche il travaglio della ricerca e della creazione.

In questa dissertazione il Boscovich presenta le proprie idee a proposito della continuità, intesa come proprietà di quello che viene chiamato abitualmente lo spazio geometrico. Abbiamo analizzato in altra sede ([1]) la dissertazione in parola da questo punto di vista, cercando di mettere in luce il pensiero di Boscovich a proposito di un problema che a quel tempo era molto dibattuto e che potrebbe essere presentato come "il problema della natura e costituzione del continuo geometrico"; problema che si ricollega alla questione degli indivisibili geometrici, nata con le opere di Bonaventura Cavalieri e lungamente dibattuta.

Richiamiamo qui brevemente i punti fondamentali che crediamo di aver visto nel pensiero di Boscovich a proposito di queste questioni: tali punti potrebbero esser riassunti molto sommariamente nel modo seguente:

i) Boscovich accetta la definizione aristotelica di quantità continua; questa, secondo tale definizione, è caratterizzata dal fatto che le parti hanno un termine comune ([2]). Per esempio, se si immagina un segmento i cui estremi saranno qui indicati con A e B, ed immaginato un punto P del segmento, questo è termine comune dei due segmenti AP e BP in cui esso divide il segmento originario AB.

ii) In questa concezione, il punto è considerato come un "termine" della linea, e quindi indivisibile e di natura diversa da quella del segmento. Pertanto, per esempio, il segmento ha un primo ed ultimo punto (beninteso in un certo ordine di percorrenza) ma non un secondo o un penultimo ([3]).

iii) Il continuo geometrico è indefinitamente divisibile; si possono dare dei segmenti comunque piccoli e comunque grandi.

([1]) Carlo Felice Manara, *Il problema del continuo geometrico nel pensiero di Ruggero Boscovich*, Relazione tenuta al Convegno per la celebrazione del bicentenario della morte di R. Boscovich, Milano, 15-18 settembre 1987.

([2]) ... Continuae quantitatis natura in eo sita est, ipso Aristotele teste, ... quod eorum partes se excipientes immediate communem habeant terminum ... nam partium numeri nullus est communis terminus, quo eae partes conjungantur ... at vero linea est continua; quia commune terminum sumere licet, quo partes ejus conjunguntur, nempe punctum (n. 6).

([3]) ... in quovis intervallo determinato habetur semper primum punctum, et ultimum, sed nullum est secundum, aut penultimum (n. 31).

iiij) Non esistono segmenti infinitesimi attuali ([4]).

v) La legge di continuità vale in ogni caso per le curve geometriche, le quali non possono avere punti d'arresto o ammettere delle discontinuità ([5]). Tuttavia può avvenire che una curva geometrica possa estendersi fino all'infinito; e può avvenire che un punto descriva un ramo di quella curva, si allontani all'infinito e ricompaia su un altro ramo della stessa curva, come avviene per un punto che percorra i rami di una iperbole. Boscovich classifica questo fatto come un "mistero" della Geometria ([6]), e afferma che con questi fenomeni misteriosi la Geometria giunge a rispettare la legge universale della continuità.

Il Boscovich giunge così a concepire la materia come costituita da punti materiali inestesi, tra i quali si esercitano delle forze che non sono soltanto attrattive, come vuole la legge di gravitazione newtoniana, ma possono anche diventare repulsive a brevi distanze; il che spiega il fenomeno della coesione non meno che quello della impenetrabilità e della solidità della materia.

Nei paragrafi seguenti prenderemo in esame le varie tesi che abbiamo enumerato, cercando di mettere in evidenza da un parte la unità e coerenza del pensiero del dalmata, e dall'altra la portata filosofica e metodologica della sua impostazione.

([4]) ... infinitesimas quantitates in se determinatas, utcumque a nobis assignabiles, nullas omnino esse posse, demonstravimus ... (n. 80).

La dimostrazione viene sviluppata, con ingegnose argomentazioni e con soluzione delle obiezioni, nei nn. 80-86.

([5]) Nullus locus geometricus potest uspiam abrumpi, qui relatus ad axem quemdam per ordinatas ipsi utcumque inclinatas in eodem angulo, nusquam habet aut impossibilem ordinatam respondentem axis puncto cuicumque, aut plures ordinatas pariter eidem puncto respondentes (n. 97).

([6]) ... ad ea jam infiniti mysteria pertinebit (n. 68).

... ejusmodi nexus continuarum linearum in Infinito mysteria nobis quaedam exhibuit, quae videntur humanae mentis captum excedere, sed contradictionem involvere nondum videntur ullam (n. 72).

In Geometria autem, quae spatium ut actu infinitum considerat, lineae considerantur tamquam actu in infinitum productae, ex qua deinde productione omnes illi nexus in ipso infinito, et mysteria, quae persequi caepimus, consequuntur, quae tamen ad intelligendam melius continuae extensionis naturam, ubi de finitis quantitatibus agitur, adhuc conducunt (n. 91).

... incredibilis quaedam elucet Geometriae industria in continuitate servanda, mysteriis etiam quibusdam, ubi opus est, in subsidio vocatis ... (n. 145).

Ci pare infatti di poter dire che, con la rivoluzione galileiana della scienza, la Matematica ha assunto il ruolo di scienza fondamentale per la conoscenza della natura, e sopratutto della materia misurabile e quantificabile. Invero la Matematica fornisce degli strumenti potenti per rappresentare la materia ed i suoi fenomeni, enunciare le ipotesi e formulare le leggi; e più ancora fornisce degli strumenti molto potenti per dedurre le conseguenze dalle ipotesi enunciate e dalle leggi formulate, in modo che il momento deduttivo (ineliminabile da ogni procedimento scientifico di spiegazione delle apparenze) sia ridotto alla applicazione delle regole sintattiche rigorosissime del linguaggio matematico. Tuttavia si potrebbe anche dire che la Matematica, ed in particolare la Geometria, non soltanto fornisce allo scienziato degli strumenti potenti e rigorosi, ma insieme presenta anche la grande tentazione della costruzione di modelli geometrici; in tal modo talvolta la ragione viene condotta dall'immaginazione a scegliere certe strade o ad applicare certi procedimenti che non sono giustificati dalla pura realtà empirica o dallo stretto rigore dei procedimenti formali.

In questo ordine di idee, noi crediamo che Boscovich abbia cercato di dominare il più possibile con la ragione lo strumento matematico e le sue suggestioni; e ci pare di poter aggiungere che laddove la sua trattazione manifesta i suoi limiti e rivela qualche neo ciò avviene forse perché l'immagine geometrica, fornita dalla fantasia, prende la prevalenza sul rigore del puro ragionamento.

2. - Abbiamo presentato brevemente e succintamente le idee fondamentali che Boscovich presenta e difende a proposito della Geometria ed in particolare del continuo geometrico, perché le sue concezioni a proposito della realtà materiale e della costituzione della materia sono strettamente collegate con le sue idee sulla Geometria. Ciò non toglie tuttavia che, come abbiamo detto in altra sede ([7]), le tesi sulla costituzione del continuo geometrico possano meritare una attenzione particolare, per la specificità dell'argomento, nell'interno del pensiero del nostro Autore. È vero tuttavia che egli si presenta prima di tutto e sopratutto come un fisico matematico, cioè uno scienziato che indaga la natura e la costituzione della materia, utilizzando a questo fine gli strumenti della Matematica.

([7]) Nella relazione citata in nota 1.

Pertanto in questo nostro lavoro ci interesseremo anche del suo atteggiamento nei riguardi della costituzione della materia, e sopratutto della impostazione metodologica di questi suoi studi, impostazione che a noi sembra notevole per molti aspetti, pur non mancando di certe ingenuità, a cui accenneremo quando se ne presenterà l'occasione.

I punti che a noi sembrano più interessanti dell'atteggiamento di Boscovich nei riguardi della struttura della materia possono essere enumerati — a nostro parere — nel modo seguente:

1) La tesi la quale afferma che i corpi che noi vediamo e tocchiamo sono costituiti da punti materiali inestesi; e che il numero dei punti materiali che costituiscono i corpi è in ogni caso finito; ed infine che non esistono punti materiali a distanza infinita.

2) L'accettazione di una struttura continua del tempo, struttura che risulta essere isomorfa a quella del continuo geometrico. Tale struttura del tempo giustifica l'apparente esistenza di linee materiali, che non hanno esistenza reale, ma che vengono descritte dai punti materiali inestesi che costituiscono i corpi.

3) L'accettazione della legge di continuità del moto come una delle proprietà fondamentali non soltanto della Geometria ma addirittura della Natura.

Queste tesi sono proposte e difese insieme con varie annotazioni metodologiche, tra le quali ci appaiono come particolarmente interessanti quelle che riguardano il primato della ragione sulla immaginazione, e quelle che riguardano il procedimento induttivo per l'enunciazione delle leggi fisiche.

3. - Prendiamo anzitutto in considerazione la tesi che abbiamo sopra presentata sub 1). Siamo qui di fronte ad uno dei fondamenti della concezione che Boscovich ha della materia: quest'ultima viene pensata come costituita da punti inestesi, indivisibili, ciascuno separato da ogni altro da uno spazio vuoto ([8]). Si potrebbe parafrasare il suo asserto di-

---

([8]) ... nos materiam ipsam, ut infra patebit, componimus ex punctis prorsus indivisibilibus et inextensis, a se invicem aliquo semper vacuo penitus intervallo disjunctis (n. 12).

Jam vero hinc eruitur, materiam constare e punctis prorsus indivisibilibus, et inextensis, a se invicem quodam semper intervallo disjunctis ... ac proinde oportet, primae particulae cendo che egli considera il punto materiale come la più piccola particella di materia per la quale non sia più eseguibile una operazione concreta che conduca a distinguerne le parti. In consonanza con questa sua tesi, egli rigetta (N. 26) il concetto di "divisibilità virtuale" (cioè non effettiva, materialmente eseguibile) che aveva condotto qualcuno a considerare addirittura i "punti gonfiati".

Questo atteggiamento, con il quale Boscovich rifiuta di accettare i punti immaginati come sferette piccolissime, e quindi dotate di parti e di conseguenza divisibili (anche solo virtualmente), si accorda con le sue affermazioni metodologiche, secondo le quali occorre diffidare della immaginazione (operante sulle sensazioni che noi abbiamo fin dall'infanzia) e bisogna invece affidarsi alla sola ragione ([9]).

Ancora in collegamento con questa tesi sta l'altra con cui egli nega la possibilità di esistenza dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande in atto ([10]).

Questa tesi, sulla finitezza delle distanze, e, di conseguenza, del numero delle particelle che costituiscono l'Universo, merita forse di essere ulteriormente meditata; essa infatti — a nostro parere — potrebbe essere vista come conseguenza di una profonda convinzione della conoscibilità

---

materiae sint omnes simplices, incompositae, adeoque indivisibiles, et a se invicem distantes, quae, cum nec illam virtualem extensionem habere possint, juxta num. 26, erunt puncta prorsus indivisibilia, et inextensa (n. 165).

([9]) ... a prima infantia, tam per visum, quam per tactum, divisibilium et extensarum quantitatum perceptiones hausimus innumerabiles, quibus ita paulatim assuevimus, ut quotiescumque puncti cujusdam excitare volumus in nostris mentibus, globuli cujusdam extensi in longum, latum, et profundum excitemus ideam, quem globulum alteri globulo adjungimus, et longissimum etiam ipsorum ordinem globulorum consideramus. Accedat sensuum perceptioni reflexio (n. 11).

Assuevimus enim ab ipsa infantia contemplationi magnitudinarum illarum, quae ad nostri corporis magnitudinem haud ita magnam proportionem haberent. Vidimus in ejusmodi magnitudinibus numerum partium, quae nostris sensibus percipi possent non ita magnum contineri. Facile nobis persuasimus, divisione continua cito deveniri debere ad magnitudines, quae nostris sensibus effugiant ... Pauci acriore mentis acie, atque animi audentiore vi sese altius attollunt, et praejudiciis omnibus sepositis, solam rationem, solam rerum naturam considerant ... (n. 20).

([10]) ... et infinite parvum, et infinite magnum actu existens et in se determinatum est prorsus impossibile, et quidquid quovis temporis momento existit, finitum est, ita tamen, ut augeri et minui possit sine ullo limite in infinitum ... Binorum punctorum quorumcumque distantia finita est semper sed semper et aliae minores haberi possunt, in qua possibilitate minuendi vel augendi distantiam a nobis indefinite cognita arbitramur ideam quantitatis infinite parvae, vel infinite magnae consistere (n. 91).

del mondo, nella misura in cui il ricorso a distanze infinite o infinitesime in atto potrebbe illudere qualche mente di aver trovato la soluzione di problemi che non sa affrontare.

A nostro parere la tesi della finitezza del numero delle particelle costituenti l'universo, e della finitezza delle distanze di ogni punto materiale, è strettamente collegata con quella che afferma la non esistenza di infinitesimi attuali. Come abbiamo detto, il Boscovich confuta la tesi della esistenza di tali infinitesimi attuali, e lo fa con ragionamenti molto ingegnosi, che fanno appello al confronto tra numero finito e numero infinito; ragionamenti che conducono sostanzialmente ad affermare che non è possibile passare dal finito all'infinito con una sola unità ([11]). In questo ordine di idee ci si presenta alla mente una certa analogia dell'atteggiamento di Boscovich con quello di Archimede il quale (nel suo scritto intitolato "Arenario") critica i suoi contemporanei perché dichiarano che il numero dei granelli di sabbia esistenti al mondo è infinito; invero questo tipo di concetto di infinito potrebbe a buona ragione essere considerato come una confessione di incapacità di costruire dei concetti per dominare dei numeri molto grandi, e di costruire degli strumenti linguistici capaci di esprimere tali concetti. Invece, come è noto, Archimede si dimostrò capace di dominare dei numeri interi molto grandi, tanto da saper esprimere il numero dei granelli di sabbia capaci di riempire una sfera avente come raggio la distanza della Terra dal Sole.

Interessante, per la comprensione del pensiero di Boscovich, è pure la confutazione della tesi che vorrebbe vedere la esistenza di infinitesimi attuali realizzata dalle differenze tra una quantità incommensurabile (rispetto ad una data quantità, considerata come unità di misura) ed una commensurabile che ne fornisce una valutazione approssimata. Dice infatti il Boscovich che la sua confutazione della esistenza di grandezze infinitesime in atto si fonda sulla ipotesi sostanziale che tali grandezze siano determinate; invece la differenza tra una grandezza incommensurabile ed una commensurabile non è determinata in sé.

Del resto ciò è coerente con la tesi ripetutamente sostenuta dal Nostro, secondo la quale l'infinito e l'infinitesimo hanno significato puramente potenziale. Ci pare infatti che questo significato possa essere attribuito alle tesi da lui esposte ripetutamente, nelle quali si sostiene che il numero dei punti di un intervallo, così come il numero delle parti in

---

([11]) Quamobrem a numero infinito, ad non infinitum per unitatem fit transitus, quod est absurdum (n. 82).

cui un continuo può essere diviso è "finitus in infinitum". Ci pare di poter esporre questo pensiero in linguaggio più accetto ai nostri contemporanei, dicendo che in ogni caso il numero delle parti del continuo, oppure di punti di divisione, è finito; ma che l'operazione di divisione, oppure di determinazione dei punti che distinguono le parti, può essere indefinitamente proseguita ([12]).

4. - Abbiamo visto come il Boscovich concepisca la materia, pensandola costituita da punti, distinti tra loro, e tutti a distanza finita. Vorremmo aggiungere che, di conseguenza, quella continuità che percepiamo è da considerarsi come una apparenza, una qualità che noi attribuiamo alla materia per la debolezza dei nostri sensi, i quali non ci permettono di cogliere i singoli punti e quindi di renderci conto della struttura vera delle cose che noi osserviamo. È facile accorgersi del fatto che una tesi cosiffatta è sostenuta anche dalla Fisica moderna, la quale ha dovuto adottarla superando le immagini che della materia si facevano gli studiosi dei secoli precedenti. A nostro parere, considerando le difficoltà con le quali è stata accettata anche la teoria dei quanti d'energia, vorremmo ricordare qui ciò che abbiamo detto poco sopra, parlando delle tentazioni che la Matematica offre alla ragione, quasi presentando come necessaria l'immagine del continuo che invece è soltanto frutto della costruzione che la fantasia elabora sulle nostre sensazioni ed esperienze.

Tuttavia questa immagine, la cui validità viene dal Boscovich ripudiata per quanto riguarda la materia, viene accettata nei riguardi del tempo.

Volendo presentare le sue idee con un vocabolario più vicino al nostro abituale, si potrebbe dire — ripetiamo — che egli concepisce il continuo temporale come isomorfo al continuo geometrico; per esempio un intervallo di tempo viene concepito come analogo ad un segmento geometrico, e quindi ogni istante risulta essere il termine, comune ed indivisibile,

([12]) ... potest autem responderi indeterminata quadam responsione, numerum partium esse finitum in infinitum ... divisibilitas nihil est aliud, nisi, ut ita dicamus, interseribilitas punctorum realium ... (n. 30)

... in nostra sententia, in qua numerus punctorum spatii est sola possibilitas punctorum realium interserendorum, respondetur itidem, ut in partibus, eorum numerum esse finitum in infinitum ... (n. 31).

che appartiene tanto all'intervallo precedente che al seguente ([13]). Pertanto, come abbiamo già detto, per il Boscovich non esiste il continuo geometrico della realtà materiale; esiste invece il moto continuo che si svolge nel tempo, e con questo moto i punti materiali indivisibili descrivono delle linee, nel senso geometrico della parola ([14]).

Questa concezione del moto, ed i corrispondenti concetti della cinematica, vengono sviluppati da Boscovich in vari paragrafi, alcuni dei quali sono anche da lui dedicati alla soluzione del classico paradosso abitualmente chiamato "di Achille". È noto che questo paradosso risale alla filosofia eleatica, ed ha dato occasione a molte analisi e discussioni, da parte dei filosofi e dei matematici. Secondo tale paradosso, il pie' veloce Achille non dovrebbe mai poter raggiungere la tartaruga che egli insegue, perché, considerato per esempio un istante come iniziale, nel periodo di tempo impiegato da Achille per raggiungere la posizione che la tartaruga aveva nell'istante iniziale, l'animale già si sarebbe spostato; pertanto, quando Achille raggiunge la posizione che la tartaruga aveva nell'istante iniziale, si ripropongono per i due delle condizioni analoghe a quelle iniziali.

Il Boscovich risolve il paradosso accettando anzitutto il fatto che, con un numero finito di operazioni di questo genere, Achille non raggiungerà mai la tartaruga, ma dimostrando d'altra parte, con una facile im-

---

([13]) Inter ea autem, quae continua sunt, tempus quoque numerari debet, ut ex ipso etiam Aristotele vidimus. Tempus enim continuo fluit, et sine ullo intermedio hiatu partes ipsius sibi continuo succedunt aliae aliis. Hinc in ipso tempore distinguendum erit, ut in linea, tempus continuum, ut hora, a termino, vel limite dirimente bina continua tempora, quod appellabimus momentum. Illud respondebit lineae, hoc puncto. Momentum erit indivisibile, ut punctum, tempus continuum erit divisibile in infinitum, ut linea ... (n. 33).

([14]) ... in materia nullam superficiem, nullam lineam, nullum admittimus solidum: adhuc tamen lineam continuam admittimus in motu, ..., ac extensionem continuam in longum, latum et profundum in spatio, quo nostra continentur puncta, et per quod excurrunt, admittimus omnino ... (n. 17).

Linea spatii in eo differt a linea reali materiae ... quod in linea reali punctum quidem intermedium quodcumque est communis limes inter lineae partem, et aliam partem, at punctum primum, et ultimum est terminus lineae realis ex una parte, et vacui spatii, vel nihili ex altera; verum in linea spatii nusquam habetur punctum in quo linea spatii interrumpatur, et quod ante se lineam non habeat, et lineam itidem post se. Id nimirum ipsa puncti geometrici natura exposcit, ut binas semper contiguas lineas connectat inter se, et conjungat vel disjungat, et separet, utrumque enim officium simul praestat, prorsus ut in tempore momentum quodvis et ante se tempus habet aliquod, et post se ac semper praeteritum aliquod a futuro immediate consequenti dirimit, ac disjungit (n. 54).

magine geometrica, che esiste il punto in cui Achille raggiungerà l'animale in un tempo finito ([15]).

Come abbiamo visto, nella concezione di Boscovich, la sostanziale atomicità della materia si accompagna alla concezione di un fluire continuo del tempo, che è isomorfo (come abbiamo visto) al continuo geometrico. Questa concezione lo conduce ad accettare la validità generale di una legge di continuità di cui egli riporta gli enunciati dovuti a G.W. Leibnitz ed a G. Bernoulli ([16]). Egli dà anche un enunciato lievemente più generale di quello di Leibnitz; volendo utilizzare un linguaggio più recente, si potrebbe dire che l'enunciato di Leibnitz riguarda prevalentemente i problemi geometrici. Abbiamo osservato altrove ([17]) che i problemi geometrici presi in considerazione a quell'epoca si traducono con delle relazioni che legano i dati e le incognite, per esempio le coordinate di certi punti cercati, in rapporto a certi sistemi di riferimento, supposti esistenti; tali relazioni vengono espresse con delle funzioni analitiche, che hanno significato anche nel campo complesso e che, nei casi considerati, presentano un andamento molto regolare; si tratta infatti quasi sempre di funzioni algebriche oppure di funzioni trascendenti, del tipo di quelle che vengono classificate come "elementari". Pertanto negli enunciati di Leibnitz le incognite possono essere considerate delle funzioni dei dati, funzioni definite implicitamente da un certo numero di legami analitici, come abbiamo detto or ora. L'enunciato di Boscovich è più generale perché

([15]) La soluzione del paradosso di Achille viene data da Boscovich nei nn. 41-51. Con linguaggio moderno, si potrebbe dire che la discussione del problema coivolge l'utilizzazione di un algoritmo infinito, che nella fattispecie è una serie geometrica convergente, a termini positivi; tale serie ha una somma finita, ma ovviamente nessuna somma parziale può dare esattamente la somma della serie.

([16]) Il Boscovich cita i seguenti passi di G.W. Leibnitz:

Cum differentia duorum casuum potest diminui infra quamcumque quantitatem datam in datis, vel in eo, quod positum est, oportet ipsa possit inveniri imminuta infra quamcumque magnitudinem in quaesitis, vel in eo quod resultat ...

Cum casus (vel id, quod datur) accedunt ad se invicem continue, ac desinit tandem unus in alium, oportet consectaria, vel eventa (vel id, quod postulatur) idem praestent ...

Datis ordinatis, etiam quaesita sunt ordinata (n. 99).

Inoltre egli riporta i seguenti passi di G. Bernoulli:

Illum dico ordinem immutabilem, ac perpetuum constitutum a creatione Mundi, quem appellare licet continuitatis legem, ac vi cujus quidquid fit, fit per gradus infinite parvos...

Natura non operatur per saltum: nihil potest ad uno extremo transire ad aliud nisi transeat per omnes intermedios gradus ... (n. 103).

([17]) Nella relazione citata in nota 1.

(come egli stesso osserva) non fa distinzione tra le variabili indipendenti e quelle dipendenti, ma semplicemente fa riferimento a legami tra le grandezze prese in considerazione ([18]).

In relazione ai problemi geometrici il Boscovich enuncia una legge di continuità a cui attribuisce una portata generale ([19]). Volendo enunciare tale legge con vocaboli moderni, potremmo dire che il Boscovich distingue due specie di curve: quelle che egli considera in certo modo come "geometriche", e che si potrebbero sotto certi aspetti considerare come "naturali" e quelle che l'uomo potrebbe costruire artificialmente.

Nel caso delle prime, come si è visto nel luogo citato in (5), la legge di continuità è sempre rispettata.

5. - Le idee che il Boscovich ha esposto a proposito della non esistenza reale delle curve e delle superfici son strettamente collegate con quelle che egli espone a proposito della costituzione della materia, e delle forze che si manifestano in questa. Di conseguenza non esistono in realtà quegli urti tra i corpi che noi osserviamo a livello macroscopico, e che provocano delle apparenti discontinuità nelle traiettorie e nelle loro direzioni; infatti le superfici di due corpi che, secondo la nostra sensazione, si urtano, non hanno esistenza reale, ed i punti descrivono delle traiettorie che sono in ogni caso curvilinee, anche se alcuni tratti delle curve descritte sono molto brevi e posseggono curvature molto alte.

Vedremo nel seguito come Boscovich spiega questo comportamento dei punti materiali, mediante forze che seguono delle leggi diverse da quelle abitualmente considerate all'epoca. Qui vogliamo invece soffermarci sugli aspetti metodologici e filosofici del pensiero di Boscovich, aspetti

---

([18]) Generaliter autem, sine relatione ad data et quaesita sic enunciari potest principium ipsum. Quotienscumque binae quantitates variabiles, quae nimirum magnitudinem mutare possunt, ita inter se connexae sunt, ut determinata magnitudine alterius, alterius etiam magnitudo determinetur; si concipiantur binae magnitudines prioris, et binae posterioris respondentes iisdem binis, ac prima quantitas mutatione continua abeat a prima magnitudine ad secundam transeundo per omnes magnitudines intermedias; idem praestabit etiam secunda. Prima illa magnitudo ea est, quam Leibnitius nominat datum, vel positum; secundam quam appellat quaesitum, resultans, consectarium, eventum, postulatum. Transitus autem per omnes intermedias magnitudines omnium optime exprimit ordinationem illam, continuitatem, imminutionem differentiae infra limites quoscumque datos (n. 102).

([19]) ... in omnibus geometricis curvis, nihil usquam mutatur per saltum, sed mutationes omnes motu continuo fiunt (n. 93).

che emergono quando si fissi l'attenzione sulla giustificazione che egli dà del suo sistema. Infatti, per escludere ogni discontinuità nelle leggi fisiche, egli si appella all'induzione; e questo appello gli offre l'occasione per enunciare i criteri che rendono valida l'induzione stessa. Anzitutto egli osserva che, per quanto riguarda le leggi naturali, l'induzione ha il massimo valore, ed anzi è addirittura l'unico metodo che conduce alla enunciazione di leggi valide ([20]). Ma l'induzione non può ovviamente prendere in considerazione tutti i casi possibili; esistono tuttavia dei criteri per poter giungere ad enunciare una legge induttiva valida: il primo è che la legge tenga conto di tutti i casi conosciuti; il secondo è che gli eventuali casi contrari possano essere spiegati mediante la legge stessa ([21]). Così, per esempio, la legge di impenetrabilità dei corpi viene osservata in moltissimi casi; le eventuali eccezioni si possono spiegare, come è il caso, per esempio, dell'olio che penetra nel marmo attraverso i pori di questo, oppure della luce che attraversa le gemme ed i cristalli.

Il Nostro prosegue analizzando ulteriormente le condizioni che rendono valida una legge ottenuta mediante induzione: secondo il suo pensiero, ciò che si dice di un tutto, enunciando una proprietà assoluta, cioè indipendente dai nostri sensi, deve poter esser detto anche di ogni parte, se non esiste una ragione positiva del contrario. Infatti il nostro giudizio sulla grandezza o piccolezza dei corpi è strettamente relativo alle possibilità dei nostri sensi ed è pronunciato in relazione alle nostre dimensioni. Pertanto vi sono ragioni per presumere che le leggi valide induttivamente alla nostra scala valgano anche per dimensioni che sono al di sotto delle nostre possibilità percettive; se non vi sono ostacoli alla analogia di comportamento, questo è un indizio che le leggi enunciate siano valide in generale; ma si tratta sempre soltanto di un indizio, perché un errore è sempre possibile; tuttavia per demolire l'indizio ben fondato, occorre che — come si fa nelle scienze giuridiche — esista una prova positiva in contrario ([22]).

Ci pare di poter dire che queste considerazioni metodologiche sulla

([20]) In primis ubi generales Naturae leges investigantur, inductio vim habet maximam, et ad earum inventionem vix alia ulla superest via (n. 134).

([21]) Inductio, ut demonstrationis vim habeat, debet omnes singulares casus, quicumque haberi possunt percurrere. Ea in Naturae legibus stabiliendis locum habere non potest. Habet locum laxior quaedam inductio ... (n. 134).

([22]) ... fieri potest, ut committatur error, sed contra ipsum errorem habebitur praesumptio, ut etiam in jure appellant, donec positiva ratione evincatur oppositum. Hinc addendum fuit, nisi ratio positiva obstet ... (n. 135).

validità del metodo induttivo dimostrano con grande evidenza l'acume e la penetrazione che il Boscovich possedeva. Dopo di aver parlato del metodo induttivo utilizzato in generale per stabilire le leggi della Natura, il Nostro passa a dimostrare induttivamente in particolare la validità della legge di continuità; egli prende in considerazione il caso della Geometria; in questa scienza la legge di continuità si presenta come vera, secondo la convinzione da lui manifestata ([23]). Invero in Geometria la sola eccezione alla legge di continuità è fornita dal passaggio di un punto attraverso l'infinito, che costituisce un gran mistero ([24]). Ma per gli enti della natura sensibile ed osservabile le distanze che si considerano sono tutte finite, come abbiamo visto ([25]), e quindi l'unica eccezione presentata dalla Geometria non ha rilevanza.

Il Nostro passa poi ad enumerare i casi a lui noti, nei quali la legge di continuità è rispettata; e poi quelli in cui in apparenza non lo è, sciogliendo le eventuali difficoltà. La sua tesi è che tutti i moti che dipendono dalla forza di gravità, dalle forze magnetiche, dalle forze elastiche rispettano la legge di continuità, perché essa viene rispettata dalle forze che provocano questi moti. Anche le velocità rispettano la legge: infatti nei moti naturali non si presentano angoli, ma questi non esistono neppure nei corpi materiali: infatti, dove il nostro occhio vede uno spigolo, il microscopio vede una curva. Lo stesso avviene degli alvei dei fiumi, delle spine delle piante, dei rostri degli uccelli rapaci. Conclude il Boscovich affermando che sarebbe impossibile enumerare tutti i casi in cui la legge di continuità è rispettata; sarebbe invero più comodo sfidare gli avversari a presentare dei casi in cui tale legge non vale ([26]).

È facile accorgersi che questo suo atteggiamento consegue dalle sue tesi, che abbiamo esposte sopra nel paragrafo 2 di questo lavoro, riguardanti la materia; secondo queste tesi non possono esistere dei punti che siano, per così dire, a contatto; due punti o sono distinti e quindi distanti tra loro, oppure coincidono. Ne consegue che tra i punti materiali inestesi che costituiscono la materia debbono manifestarsi delle forze che spiegano il comportamento della materia stessa. Tali forze hanno il comporta-

---

([23]) Si veda per esempio il luogo citato in nota 5.

([24]) Si vedano i luoghi citati in nota 6.

([25]) Si vedano i luoghi citati in nota 10.

([26]) Infinitum esset singula persequi, in quibus continuitas in Natura observatur. Satius est generaliter provocare ad exhibendum casum in Natura, in quo continuitas non servetur, qui omnino exhiberi non poterit (n. 138).

mento prescritto dalle leggi di Newton a distanze relativamente grandi dai punti; esse quindi, a tali distanze, si manifestano come attrattive. Ma esse diventano repulsive a brevi distanze, raggiungendo valori tali da giustificare il mancato incontro tra due punti qualisivogliano. Ogni sostanza presenta delle forze specifiche di questo tipo, le quali spiegano, con le loro leggi, le proprietà di coesione della sostanza stessa ([27]).

In questo ordine di idee il Boscovich sviluppa un interessantissimo confronto tra la sua teoria sulla costituzione della materia e quella di Newton. Infatti per quest'ultimo scienziato la materia è continua e due parti di essa possono aderire con un contatto perfetto; anche il Mac Laurin ammette il contatto, e di conseguenza il salto di velocità nel caso di urti. Invece Leibnitz non ammette che i corpi siano duri, ed afferma che essi sono tutti molli ed elastici; di conseguenza ammette la variazione di velocità per gradi continui ([28]).

Dal punto di vista metodologico e filosofico in generale, è interessante il ragionamento con cui Boscovich risponde alle obiezioni che vengono opposte alla sua teoria; sarebbe anche interessante condurre una analisi dell'ambiente scientifico e culturale dell'epoca dal tono e della struttura delle argomentazioni svolte; ma ciò esula dall'orizzonte ristretto del presente lavoro. Ci limitiamo quindi a ricordare la risposta che Boscovich dà a proposito delle obiezioni alla legge di continuità, riguardanti il moto dell'acqua che esce da un foro praticato alla base di un recipiente; come è noto, le singole particelle d'acqua escono dal foro con la velocità che avrebbero se cadessero dal pelo libero dell'acqua contenuta nel recipiente. Afferma Boscovich che, all'uscita della particella d'acqua dal recipiente, l'incremento di velocità della particella avviene sempre con continuità, come affermano i migliori cultori di Meccanica ([29]).

In ogni caso, la velocità dell'acqua che esce dal foro non potrebbe essere superiore a quella con cui viene tolto un eventuale tappo. Si potrebbe tuttavia prendere in considerazione l'obiezione che nasce dalla ipo-

---

([27]) Inde colligimus materiam constare ex punctis prorsus indivisibilibus, a se invicem aliquo finito intervallo distantibus, et soliditatem, ac cohesionem repetimus a distantia limitis inter repulsionem in minori distantia, attractionem in majori; adeoque soliditatem, et extensionem mathematice continuam nequaquam admittimus (n. 159).

([28]) Leibnitziani in primis ... dicunt mollia esse omnia corpora, vel elastica, ut nimirum paullatim partes introcedant, et dum figura mutatur, velocitatis discrimen gradatim juxta Continuitatis legem elidatur (n. 160).

([29]) ... At in eo casu quamplurimi melioris notae Mechanici diserte affirmant se putare, illam ipsam velocitatem acquiri paullatim non totam momento temporis ... (n. 156).

tesi che Dio, nella Sua onnipotenza, sopprimesse istantaneamente il tappo. A questa obiezione Boscovich risponde che noi ci stiamo ora occupando delle cose che avvengono in Natura, e non di quelle che potrebbero avvenire se Dio stesso violasse quelle leggi che Egli ha stabilito ([30]). E questo atteggiamento ci sembra molto valido, perché riporta la discussione sui fatti della scienza nell'ambito delle teorie puramente scientifiche, respingendo le intromissioni di metodi teologici laddove la Teologia non sembra direttamente interessata. In ogni caso, conclude Boscovich, l'incremento di velocità della particella rispetterebbe la legge di continuità, anche se in un tempo molto breve.

Analoghe osservazioni si potrebbero fare a proposito dell'atteggiamento che egli assume nei riguardi del cosiddetto "Principio di ragion sufficiente", invocato dai Leibnitziani per giustificare la legge di continuità. Contro la deduzione secondo la quale, partendo da tale principio, si giungerebbe a dimostrare che il mondo che noi vediamo è il migliore dei mondi possibili, il Nostro oppone la esistenza della libertà umana e soprattutto della libertà Divina, che non può essere determinata da alcuna ragione (esterna a se stessa) nell'atto della creazione. In ogni bene creato è possibile il miglioramento e nelle cose create una ragione fisica esiste sempre ed è la causa. Nella morale invece non sempre esiste una causa propriamente detta e "stat pro ratione voluntas". Di conseguenza egli non nega che ogni effetto debba avere una sua causa, e che ogni conclusione debba avere delle premesse. Ma noi non possiamo conoscere tutte le ragioni del Creatore se non per induzione, dalla osservazione delle cose che avvengono con regolarità, e dalle quali tiriamo le leggi della natura. Ma c'è differenza tra induzione e dimostrazione ([31]).

6. - Abbiamo visto brevemente gli atteggiamenti metodologici di Boscovich, atteggiamenti che dimostrano la sua originalità e la sua indipendenza di giudizio nei riguardi delle opinioni o delle procedure correnti nella scienza del suo tempo. Riassumendo la nostra esposizione, pensiamo

([30]) ... respondebimus, nos hic inductionem efformare ex iis, quae in Natura contingunt, non ex iis, quae contingerent, si Deus Naturae leges violasset ... (n. 157).

([31]) Debet igitur haberi ratio, cur aliquid potius sit, quam non sit, sed ratio physica in creatis habebitur semper, nimirum causa aliqua, ratio moralis non semper aderit et poterit haberi illud, "stat pro ratione voluntas" (n. 127, 128).

di poter additare come particolarmente positivi alcuni aspetti del pensiero del dalmata: in primo luogo la sua insistenza nel distinguere, anche nell'ambito scientifico, l'opera della immaginazione da quella della pura ragione. Ciò lo porta in particolare a respingere la nozione di grandezze infinite o di distanze infinite, assunte quasi come un rifugio della ragione nei riguardi di enti non conoscibili.

Ciò è del resto coerente con il suo atteggiamento nei riguardi delle argomentazioni che fanno intervenire la potenza infinita di Dio. Noi pensiamo che in questi casi egli dimostri una coerenza di metodo non comune nelle dissertazioni dell'epoca, nelle quali spesso le argomentazioni scientifiche erano commiste con altre di tipo filosofico e teologico.

Ricordiamo infine l'equilibrio e l'acume con i quali egli parla della legge di induzione, nei riguardi della conoscenza delle cose della natura.

Si potrebbe dire che queste doti positive del Boscovich scienziato e fisico matematico non sono offuscate, ma anzi messe in maggior luce dalle ingenuità e dalle lacune che si incontrano nella sua visione complessiva della scienza fisico-matematica. Passeremo in rassegna questi aspetti del pensiero scientifico del dalmata, per avere una visione il più possibile completa della sua personalità intellettuale; in linea di massima si potrebbe dire che le ingenuità e le lacune si presentano (come abbiamo già detto nel paragrafo 2) nella misura in cui egli diventa in certo modo incoerente con la sua abitudine di rigida razionalità e cede alle tentazioni della immaginazione. Ciò avviene quasi naturalmente, nella trattazione delle questioni geometriche, le quali hanno il loro fondamento, in modo naturale, nella elaborazione che la fantasia opera sulle nostre osservazioni e sulle nostre sensazioni.

Anzitutto, per quanto riguarda il concetto di curva, egli appare strettamente legato alla immagine cinematica, che nasce dal moto continuo di un punto nel tempo. Si spiegano così le sue argomentazioni per salvare la validità della legge di continuità in Geometria, anche nelle occasioni (come quella offerta dalla cuspide di una curva piana) in cui essa pare cadere in difetto ([32]). In altri casi le sue argomentazioni mostrano la loro debolezza in certi problemi, che egli risolve talvolta con espedienti abbastanza ingenui; tali sono per esempio le spiegazioni che egli dà del caso della sparizione a coppie delle intersezioni di una curva con una retta variabile. Volendo utilizzare un linguaggio più recente, e riferendoci ad un esempio particolare, pensiamo al caso di una circonferenza e ad una

---

([32]) Si vedano le argomentazioni svolte nei nn. 139, 140, 141.

retta t che le è tangente. Consideriamo una retta che varia con continuità nel fascio delle rette parallele a t; quando la retta variabile è molto vicina a t, vi saranno delle posizioni in cui esistono due intersezioni con la circonferenza; tali intersezioni spariscono, perché le coordinate corrispondenti divengono immaginarie coniugate (rispetto ad un riferimento cartesiano che abbia l'asse delle ordinate parallelo alla tangente t) quando la retta variabile passa dall'altra parte della t. Ma ciò avviene, asserisce Boscovich "... reclamante Geometria", perché noi — a suo dire — violiamo la natura degli oggetti geometrici; egli escogita inoltre una spiegazione quasi meccanica o fisiologica della sparizione dei due punti: infatti (come si verifica elementarmente) questi corrono ad incontrarsi percorrendo la circonferenza con una velocità molto maggiore di quella con cui si muove la retta secante; e la loro sparizione è dovuta ad una specie di annichilamento che è conseguenza dell'urto reciproco. Una spiegazione della stessa specie egli dà del caso dei due punti di una curva (ovviamente algebrica o almeno analitica) che spariscono nelle vicinanze di una cuspide della curva stessa: in questo caso la velocità con la quale i punti percorrono i rami di curva è minore di quella con cui si muove la retta secante, e il fenomeno della loro sparizione è assimilato a quello del languore che precede la morte di un animale ([33]). Le difficoltà maggiori nell'ambito della Geometria si presentano a Boscovich nella considerazione dei rami di curva che si estendono all'infinito. In altra sede abbiamo messo in evidenza l'acume con cui egli analizza la struttura della retta, ed attribuisce a questa figura un punto all'infinito, che la rende analoga ad una curva chiusa, come la circonferenza. Fenomeni analoghi si presentano per altre curve elementari, per esempio per le sezioni coniche; in questi casi si presentano dei rami che si estendono sino all'infinito; ma, per esempio seguendo il punto che descrive un ramo di un'iperbole, si può constatare che, dopo essere passato per l'infinito, esso ritorna sull'altro ramo ([34]). Il fenomeno descritto gli permette di unificare in qualche modo le tre specie di coniche; il che del resto appare evidente quando si consideri la generazione di tali curve mediante sezioni piane del cono, e si immagini il piano secante che varia con continuità. Tutte queste immagini lo conducono a considerare l'immenso iato dell'infinito come un unico punto; ma egli non si nasconde che questo fatto presenta degli aspetti misteriosi, che tuttavia fondano la differenza tra la Geome-

([33]) Le argomentazioni sono svolte nel n. 146.

([34]) Le argomentazioni corrispondenti sono svolte nel n. 65.

tria e la fisica ([35]). Infatti nella realtà fisica materiale egli non accetta distanze infinite; tuttavia nella Geometria egli deve ammettere in qualche modo l'infinito, pur accettandolo soltanto con significato potenziale, cioè come possibilità di allontanare indefinitamente un punto ([36]).

Il confronto tra Geometria e Fisica viene condotto avanti in altri luoghi, in particolare per fondare e sviluppare la tesi della validità generale della legge di continuità; le argomentazioni del dalmata potrebbero essere brevemente riassunte nei punti seguenti: i legami funzionali tra grandezze fisiche possono essere rappresentati convenzionalmente con diagrammi cartesiani, che danno origine a curve geometriche. Queste ultime possono dare luogo a discontinuità soltanto in corrispondenza ad intersezioni plurime con rette parallele all'asse delle ordinate; se una funzione è ad un solo valore, essa non può dar luogo a discontinuità. Ma questo è appunto il caso delle funzioni che rappresentano delle leggi della Fisica, perché in questa scienza ogni grandezza è determinata, come funzione del tempo ([37]).

Ci si potrebbe chiedere come mai una mente acuta come quella di Boscovich non abbia scorto la sostanziale debolezza di una argomentazione cosiffatta: infatti essa sostanzialmente si fonda su immagini geometriche per convalidare una pretesa validità universale di una legge fisica.

7. - Pare abbastanza ovvio il pensare che non sia possibile rispondere con sicurezza alla domanda con cui si chiude il paragrafo precedente; forse non ha neppure molto senso il porsi la domanda, perché è molto difficile indagare sulle cause degli errori e delle incoerenze. Possiamo quindi soltanto tentare di dare una spiegazione che in qualche modo ci orienti

---

([35]) Si vedano i passi citati in nota 6.

([36]) ... lineam actu existentem in infinitum protensam nullam esse posse, sed infinitum ipsum esse indefinitam potentiam removendi reale punctum a reali puncto ultra quoscumque limites utcumque ad libitum determinatos quae distantia quotienscumque existat, finita esse debeat, sed quacumque finita alia major esse possit ita, ut nulla sit possibilium ultima, et maxima ... (n. 72).

Simplicissimus casus est, in quo non fiat recessus in Infinitum, et is habet locum in Natura, in qua nihil actu infinitum esse potest ... (n. 116).

Altre argomentazioni riguardanti la stessa questione sono sviluppate nei nn. da 114 a 118.

([37]) Le argomentazioni qui riassunte sono sviluppate da Boscovich nei nn. da 108 a 113.

nella comprensione dell'atteggiamento del Nostro. Tale spiegazione potrebbe far riferimento a due circostanze principali: anzitutto alla situazione generale della scienza, ed in particolare della scienza fisico-matematica all'epoca in cui Boscovich eseguiva le sue ricerche; in secondo luogo alle caratteristiche generali della spiegazione fisico-matematica della natura. Tuttavia noi crediamo, con F. Enriques, che l'errore abbia un suo ruolo nella ricerca della verità, sopratutto se viene commesso da una mente di alto livello ([38]).

Per quanto riguarda il primo punto, cioè la situazione della scienza fisico-matematica all'epoca di Boscovich, vorremmo osservare che la Geometria era allora considerata e vista come una scienza caratterizzata dai suoi contenuti, dagli oggetti che essa studiava. L'oggetto della Geometria veniva indicato, a seconda dei vari Autori, nella estensione, nello spazio o in altri enti, ugualmente indeterminati o mal definiti. Del resto, un atteggiamento cosiffatto non è sparito molto presto, perché G. Peano, scrivendo nell'ultimo quarto del secolo XIX, osservava ironicamente che molti trattati scritti da suoi contemporanei consideravano lo spazio come oggetto della Geometria, attribuendogli varie qualità, come quella di essere omogeneo, uniforme e simili; proseguiva Peano osservando che se lo spazio fosse l'oggetto della Geometria, né Euclide, né Archimede né altri sommi geometri greci avrebbero potuto scrivere le loro opere, perché mancava nella lingua greca la parola che designasse lo spazio, inteso in questo senso ([39]).

A nostro parere, soltanto dopo la crisi provocata dalla invenzione delle Geometrie non euclidee e dalla dimostrazione della coerenza logica di tali dottrine i matematici giunsero a formarsi l'immagine della Geometria nel senso moderno; e il movimento generale di analisi critica dei fondamenti della Matematica si esplicò anche nella costruzione di sistemi coerenti di assiomi, a fondamento della Geometria.

Vorremmo anche ricordare l'analisi critica del concetto di continuo geometrico e della proprietà di continuità delle funzioni, che venne svolta durante il secolo XIX. In particolare, per quanto riguarda il concetto di curva e la sua rappresentazione, ricordiamo che soltanto nel 1890 fu co-

---

([38]) FEDERIGO ENRIQUES, *L'errore nelle Matematiche*, Periodico di Matematiche (1942). Sulla rivista "Periodico di Matematiche" del 1942, il nome dell'autore dell'articolo è "Adriano Giovannini". Infatti all'epoca l'Enriques, a causa del leggi razziali vigenti allora in Italia, non poteva firmare alcuna pubblicazione; egli si costruì allora un nome ed un cognome fittizi, formandoli con i nomi dei suoi due figli Adriana e Giovanni.

([39]) GIUSEPPE PEANO, *Sui fondamenti della Geometria*, Rivista di Matematica, vol. IV (1894).

struito da G. Peano il celebre esempio di curva continua che riempie un intero quadrato; esempio che costrinse i matematici a precisare il significato della rappresentazione di certi enti della realtà mediante strumenti matematici ([40]). E, per quanto riguarda il continuo geometrico, ricordiamo che ancora negli anni 1882 e successivi lo stesso Peano polemizzava con G. Veronese, il quale aveva costruito un sistema di Geometria non archimedea; sistema che Peano non accettò, per quanto fosse coerente, come fu dimostrato in seguito.

Non possiamo quindi far carico a Boscovich della limitatezza degli strumenti concettuali e della relativa ristrettezza delle idee, che era quella della scienza del suo tempo.

Rimarrebbe da analizzare il secondo motivo a cui abbiamo accennato, cioè l'insieme delle caratteristiche della spiegazione fisico-matematica della Natura, in particolare della Natura inorganica. Abbiamo accennato ripetutamente al fatto che una spiegazione cosiffatta si accompagna spesso, in modo quasi ineluttabile, ad un sistema di immagini; queste, insieme con le relazioni matematiche, spesso vengono considerate come parti integranti del modello della realtà offerto da una determinata teoria; e spesso avviene che si consideri come crisi di una teoria semplicemente la caduta dell'insieme di immagini che accompagnano quasi inconsciamente le relazioni e le leggi matematiche, ma ovviamente non le fondano.

Questa circostanza ha già attirato l'attenzione degli scienziati: per esempio J.B. Fourier, nel presentare la sua teoria della trasmissione del calore (rimasta classica nella fisica matematica) avvertiva che gli sviluppi matematici della sua teoria erano indipendenti dal modello che l'immaginazione si forma dei fenomeni considerati.

Tuttavia non si può negare che la fantasia abbia una parte importante, ed entri in molti modi nella costruzione delle teorie scientifiche, con la raffigurazione dei rapporti spaziali e con la rielaborazione e la extrapolazione delle esperienze, sempre limitate dalla portata dei nostri sensi e dei nostri strumenti.

Si potrebbe dire che ogni grande scienziato ha lavorato anche con la fantasia; ma probabilmente la grandezza dello scienziato dipende anche dalla sua capacità di superare gli stimoli, pur necessari, della fantasia, per affidarsi alla pura coerenza della ragione, che trova nella Matematica uno strumento ineguagliabile di rappresentazione e di deduzione.

([40]) GIUSEPPE PEANO, *Sur une courbe qui remplit toute un aire plane,* Mathematische Annalen, Bd. 36 (1880)

Le vicende inesorabili della Storia umana hanno insegnato che ben difficilmente si può giudicare definitiva una teoria scientifica, ed in particolare una teoria fisico-matematica; ma sappiamo anche che questa limitazione della nostra intelligenza non ha mai arrestato l'uomo nella ricerca della verità.